

1 s を定数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + s}{a_n + 2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) $s=4$ とする。 $a_2 = \text{ア}$, $a_{100} = \text{イ}$ である。

(2) $s=0$ とする。 $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 $b_1 = \text{ウ}$ である。

さらに、 b_n と b_{n+1} は関係式 $b_{n+1} = b_n + \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ を満たすから、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\text{カ}}{n + \text{キ}}$$

(3) $s=1$ とする。 $c_n = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと、 $c_1 = \text{ク}$ である。

さらに、 c_n と c_{n+1} の関係式を求め、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めることにより、 $\{a_n\}$ の

一般項は $a_n = \text{ケ} - \frac{\text{コ}}{\text{サ} \cdot \text{シ} + 1}$ であることがわかる。

ただし、 シ については、当てはまるものを、次の ① ~ ④ のうちから一つ選べ。

- ① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

(4) (3) の数列 $\{c_n\}$ について $\sum_{k=1}^n c_k c_{k+1} = \frac{\text{スセ}}{\text{ソ}} (\text{タ}^n - 1)$ である。

次に、(3) の数列 $\{a_n\}$ について考える。 $s=1$ であることに注意して、① の漸化式を変形すると $a_n a_{n+1} = \text{チ} (a_n - a_{n+1}) + \text{ツ}$ である。

ゆえに $\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} = \text{テ} + \frac{\text{ト}}{\text{サ} \cdot \text{ナ} + \text{ニ}}$ である。

ただし、 テ と ナ については、当てはまるものを、次の ① ~ ④ のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

- ① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

解答 (ア) 2 (イ) 2 (ウ) 2 $\frac{\text{エ}}{\text{オ}} \frac{1}{2}$ $\frac{\text{カ}}{n+(\text{キ})} \frac{2}{n+3}$ (ク) 3
 (ケ) 1 (コ) 2 (サ) 3 (シ) ② $\frac{\text{スセ}}{\text{ソ}} ((\text{タ})^n - 1) \frac{27}{8} (9^n - 1)$
 (チ) $(a_n - a_{n+1}) + (\text{ツ})$ $2(a_n - a_{n+1}) + 1$ (テ) ① (ト) 4 (ナ) ③
 (ニ) 1

2 (1) 初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1 + 2a_2 = 0$ を満たしている。このとき、公比は

$\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ である。 $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{9}{4}$ ならば、 $a_4 + a_5 + a_6 = \frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$ であり、

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 57$ となるのは $n = \text{ク}$ のときである。

(2) $b_n = pn + q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して、初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$b_7 = 1, S_{12} = 10$ ならば、 $p = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$, $q = \frac{\text{サシ}}{\text{ス}}$ であり、

$S_1 + S_2 + \dots + S_{12} = \frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$ である。

解答 $\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \frac{-1}{2}$ $\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}} \frac{-9}{32}$ (ク) 9 $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \frac{1}{3}$ $\frac{\text{サシ}}{\text{ス}} \frac{-4}{3}$
 $\frac{\text{セソ}}{\text{タ}} \frac{52}{3}$