

1 p, q を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C 、放物線 $y = -kx^2$ を D 、放物線 D 上の点 $(a, -ka^2)$ を A とする。ただし、 $k > 0, a > 0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、 $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1) = 2$ より、 $p = \boxed{\text{イ}}$ 、 $q = \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

(2) 点 A における放物線 D の接線を l とする。 D と l および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。
 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka \boxed{\text{コ}} \dots\dots \text{①}$$

と表せる。 l と x 軸の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり、 D と x 軸および直線 $x = a$ で囲

まれた図形の面積は $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。よって、 $S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。

(3) さらに、点 A が曲線 C 上にあり、かつ (2) の接線 l が C にも接するとする。このときの (2) の S の値を求めよう。

A が C 上にあるので、 $k = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$ である。

l と C の接点の x 座標を b とすると、 l の方程式は b を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}} (b^2 - \boxed{\text{ナ}})x - \boxed{\text{ニ}} b^3 \dots\dots \text{②}$$

と表される。②の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x) - g(x) = (x - \boxed{\text{ヌ}})^2 (x + \boxed{\text{ネ}} b)$$

と因数分解されるので、 $a = -\boxed{\text{ネ}} b$ となる。①と②の表す直線の傾きを比較する

ことにより、 $a^2 = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって、求める S の値は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

【解答】 (ア) 0 (イ) 0 (ウエ) -3 (オ) 1 (カキ) -2 (クケ) -2
 (コ) 2 $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \frac{a}{2}$ (ス) 3 (セ) 3 (ソタ) 12 $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \frac{3}{a}$
 (テ) a (ト) 3 (ナ) 1 (ニ) 2 (ヌ) b (ネ) 2
 $\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \frac{12}{5}$ $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \frac{3}{25}$

2 関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leq 0$ を満たすとする。

$t > 1$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = 1$, $x = t$ で囲まれた図形の面積を W とする。

t が $t > 1$ の範囲を動くとき、 W は、底辺の長さが $2t^2 - 2$ 、他の2辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。

このとき、 $x > 1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。

一般に、 $F'(x) = \boxed{\text{ア}}$, $W = \boxed{\text{イ}}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを、

次の ① ~ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| ① $-F(t)$ | ② $F(t)$ | ③ $F(t) - F(1)$ |
| ④ $F(t) + F(1)$ | ⑤ $-F(t) + F(1)$ | ⑥ $-F(t) - F(1)$ |
| ⑦ $-f(x)$ | ⑧ $f(x)$ | ⑨ $f(x) - f(1)$ |

したがって、 $t > 1$ において $f(t) = \boxed{\text{ウエ}} t^{\boxed{\text{オ}}} + \boxed{\text{カ}}$ である。

よって、 $x > 1$ における $f(x)$ がわかる。

解答 (ア) ⑦ (イ) ④ (ウエ) -6 (オ) 2 (カ) 2