[1] 関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ を考える。

(1) $f(0)=\boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta=\dfrac{\cos2\theta+\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。

さらに，$\sin2\theta$，$\cos2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$f(\theta)=\boxed{\text{キ}}\sin2\theta-\boxed{\text{ク}}\cos2\theta+\boxed{\text{ケ}}$ ……①

となる。

(3) θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，① は

$$f(\theta)=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right)+\boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m=\boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$f(\theta)=\boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

[2] $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ および関係式 $2\cos^2(\beta-\alpha)=3\sin(\beta-\alpha)$ ……① を満たす α，β に対して，$y=4\sin^2\beta-4\cos^2\alpha$ とおく。

(1) $t=\sin(\beta-\alpha)$ とおくと，① から $t=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であることがわかる。

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) (1) により $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，加法定理を用いて，y を α で表すと

$$y=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\cos^2\alpha+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\sin\alpha\cos\alpha \quad ……②$$

となる。

このことから，$y=\boxed{\text{エ}}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

(3) 2倍角の公式を用いると，② は $y=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\sin2\alpha-\boxed{\text{サ}}\cos2\alpha$ となる。

さらに，三角関数の合成を用いると $y=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right)$ と変形できる。

このことから，$y=-\sqrt{3}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}$ のときである。